

الباب الخامس: متتابعات ومتسلسلات الدوال

١ متسلسلات القوى

في الباب السابق درسنا تقارب متسلسلات من الأعداد الحقيقية تعتمد على بارامتر a ، عندما تكون هذه المتسلسلات تقاربية يمكننا دراسة مجموعها كدالة في a .
١-١- أمثلة:

(١) عندما تكون $s > 1$ فإن المتسلسلة $\sum \frac{1}{k^s}$ تقارب، مجموع هذه المتسلسلة يرمز له بالرمز $\zeta(s)$ وهي دالة لها تطبيقات عديدة في نظرية الأعداد.

(٢) المتسلسلة الهندسية $\sum t^k$ تقارب عندما $|t| < 1$ ومجموعها هو $f(t) = 1/(1-t)$.

يمكن أن نفكر في السير بالطريق العكسي: إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ ، هل يمكن كتابة هذه الدالة على صورة مجموع متسلسلة تقاربية من الحدود التي تعتمد على x ؟ لهذه الفكرة تطبيقات هامة كانت في الحقيقة هي الدافع وراء دراسة المتتابعات والمتسلسلات، فحيث أن المجاميع الجزئية للمتسلسلة تعطي تقريباً لمجموعها فإننا يمكن أن نبحث عن قيم تقريبية لدالة $f(x)$ عن طريق تمثيلها بمجموع متسلسلة. أكثر طرق التقريب شيوعاً للدوال في متغير حقيقي هو التقريب باستخدام كثيرات الحدود، وذلك لأن كثيرات الحدود دوال بسيطة يمكن دراسة سلوكها بشكل ميكانيكي. لنسترجع أولاً تعريف كثيرات الحدود وبعض نظريات التقريب الشهيرة:

٢-١- تعريف: لتكن $a_0, \dots, a_n$ أعداد حقيقية بحيث $a_n \neq 0$ ، الدالة

$$p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$$

تسمى كثيرة حدود من الدرجة n . ومن المتعارف عليه أن نعتبر الدالة الصفرية، كثيرة حدود من الدرجة $-\infty$.

هناك الكثير من النظريات التي تصف تقريب الدوال بكثيرات الحدود، لكن أشهر تلك النظريات هي نظرية تايلور التي سبق دراستها في مقرر التفاضل والتكامل:

٣-١- نظرية: لتكن $f : [c - r, c + r] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق $n + 1$ مرة ،
لأي $x \in]c - r, c + r[$ يوجد θ_x بين x, c بحيث

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n \\ + \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}$$

وإذا كانت المشتقة من الرتبة $n + 1$ محدودة بالعدد M فإن

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1} \right| \leq M \frac{(2r)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

تصف نظرية تايلور الدالة $f(x)$ باعتبارها مجموع كثيرة حدود (نسميها كثيرة حدود تايلور من الدرجة n) هي

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k$$

وباقى $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}$ ، وتعطيناً حداً علوياً لقيمة الباقي لا يعتمد على x .
ويمكن القول بأنه إذا كانت n كبيرة بما فيه الكفاية فإن كثيرة حدود تايلور تقرب جيد للدالة $f(x)$. يوحي هذا بإمكان تقريب الدوال بمتسلسلات على الصورة

$$\sum a_k(x - c)^k$$

٤-١- تعريف: لتكن $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية ، المتسلسلة

$$\sum a_k(x - c)^k$$

تسمى متسلسلة قوى في المتغير x مركزها c .

ننتقل الآن لكيفية تمثيل دالة معطاة باستخدام متسلسلات القوى، النظرية الأساسية في هذا الشأن هي نظرية تايلور الثانية

٥-١- نظرية: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات على الفترة $[c - \delta, c + \delta]$ حيث $\delta > 0$ فإن :

إذا كان لكل $x, \theta \in]c - \delta, c + \delta[$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1} \right| = 0$ فإن f تمثل بمتسلسلة قوى

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

وتسمى هذه المتسلسلة متسلسلة تايلور للدالة f أو متسلسلة ماكلورين في الحالة الخاصة $c = 0$.

برهان - متروك للقارئ.

٦-١- أمثلة:

(١) لتكن $f(x) = e^x$ ، من المعروف أن $f^{(k)}(x) = e^x$ لكل $k \in \mathbb{N}$ وبالتالي فإن $f^{(k)}(0) = 1$ لأي k ، كما أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

ينتج بالتالي متسلسلة ماكلورين:

$$\mathbb{R} \ni x \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

(٢) لتكن $f(x) = \cos x$ ولتكن $c = \pi$ ، من السهل حساب المشتقات: $f^{(k)}(x) = \cos(x + k\pi/2)$ لكل $k \in \mathbb{N}$ وبالتالي:

$$f^{(k)}(\pi) = \begin{cases} 0 & \text{عندما } n \text{ فردي} \\ (-1)^{1+k/2} & \text{عندما } n \text{ زوجي} \end{cases}$$

ونجد متسلسلة تايلور:

$$\mathbb{R} \ni x \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (x - \pi)^{2k}$$

٧-١- تطبيق: مفكوك ذات الحدين بأي أس حقيقي: سندرس مفكوك ماكلورين للدالة $f(x) = (1+x)^\beta$ حيث $\beta \in \mathbb{R}$ أس حقيقي. في الحالة الخاصة التي يكون فيها $\beta = n \in \mathbb{N}$ يمكن حساب المفكوك من صيغة نيوتن لذات الحدين

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k$$

لحساب المفكوك في الحالة العامة نلاحظ أنه لأي $n > 0$ يكون

$$f^{(n)}(x) = \beta(\beta - 1) \cdots (\beta - n + 1) (1 + x)^{\beta - n} = O(n!) | (1 + x)^{\beta - n} |$$

وبالتالي فإن $f^{(n)}(0) = \beta(\beta - 1) \cdots (\beta - n + 1)$ وعندما يكون $|\theta| < 1$, $|x|$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+\theta)^\beta}{(1+\theta)^{n+1}} x^{n+1} \right| = 0$$

و تكون متسلسلة ماكلورين هي

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta - 1) \cdots (\beta - k + 1)}{k!} x^k$$

هل يمكن أن نعرف متى تكون متسلسلة تايلور أو ماكلورين تقاربية؟ فمن المؤكد أن الدالة لا يمكن تمثيلها بمتسلسلة تباعدية. لذا سندرس تقارب متسلسلات القوى.

٨-١- مثال: متسلسلة القوى $\sum_k 2^{k^2} x^k$ لا تتقارب لأي $x \neq 0$. لأن لأي x يمكن أن نجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث $|x| > \frac{1}{2^k}$. وبالتالي يكون الحد العام $2^{k^2} x^k > 1 \not\rightarrow 0$. لا تمثل هذه المتسلسلة إذن دالة معرفة على أي فترة سوى $\{0\}$.

دراسة تقارب متسلسلات القوى في منتهى السهولة ويمكن تلخيصها في النظرية التالية:

٩-١- نظرية: لتكن $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k$ متسلسلة قوى، نضع

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(١) إذا كانت المتسلسلة تقاربية عند x_1 فإنها تتقارب تقارباً مطلقاً عند أي x يحقق $|x - c| < |x_1 - c|$.

(٢) إذا كان $r = +\infty$ فإن المتسلسلة لا تتقارب سوى عند مركزها c .

(٣) إذا كان $r < +\infty$ ، نضع $R = \begin{cases} 1/r & r > 0, \\ +\infty & r = 0. \end{cases}$ وتكون متسلسلة القوى

تقاربية تقارباً مطلقاً عند كل نقطة $x \in]c - R, c + R[$ وتباعدية لأي $x \in \mathbb{R} \setminus [c - R, c + R]$ يسمى نصف قطر تقارب المتسلسلة، والفترة $]c - R, c + R[$ تسمى فترة تقارب المتسلسلة.

برهان -

(١) لنكن $x_1 \in \mathbb{R}$ بحيث أن المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_1 - c)^k$ تقاربية، ولتكن x نحقق $|x - c| < |x_1 - c|$. نأخذ $\rho < 1$ بحيث $\rho > \frac{|x - c|}{|x_1 - c|}$. المتتابعة $(|a_k (x_1 - c)^k|)_{k \in \mathbb{N}}$

نؤول للصفر ، وبالتالي إذا أعطينا $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد n_0 بحيث $|a_k(x_1 - c)^k| < (1 - \rho)\varepsilon$ لكل $k > n_0$ ، ليكن $n > n_0$ و ليكن $p \in \mathbb{N}$ لدينا

$$\sum_{k=n}^{n+p} |a_k| |x - c|^k < \sum_{k=n}^{n+p} \rho^k |a_k| |x_1 - c|^k < (1 - \rho)\varepsilon \sum_{k=n}^{n+p} \rho^k < \varepsilon$$

يثبت هذا نحقق شرط كوشي للمتسلسلة $\sum |a_k(x - c)^k|$ وبالتالي فإن $\sum a_k(x - c)^k$ تقاربة تقارب مطلق.

(٢) من اختبار الجذر النوني: المتسلسلة $\sum a_k(x - c)^k$ تباعدية إذا كان $\limsup_k \sqrt[k]{|a_k(x - c)^k|} > 1$ أي إذا كان

$$|x - c| \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

فإذا كانت $r = +\infty$ فإن هذا الشرط يتحقق لأي $x \neq c$.

(٣) ينتج بنفس الطريقة كالجزء السابق (متروك كتمرين للقارئ).

١٠-١ - ملاحظة: في حالة $r = +\infty$ لا نعطينا النظرية السابقة أي معلومات عن تقارب المتسلسلة عند النقطتين $c - R, c + R$.

١١-١ - ملاحظة: من السهل إثبات أنه إذا كان

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = r \in \overline{\mathbb{R}}$$

فإن $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

١٢.١ أسئلة. إدرس صحة أو خطأ كل من العبارات التالية:

(١) إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين في الفترة $[x - c, x + c]$ فإنه توجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية $p(x)$ بحيث $f(x) = p(x) + O(|x - c|^3)$.

(٢) إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق ثلاث مرات في الفترة $[x - c, x + c]$ فإنه توجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية $p(x)$ بحيث $f(x) = p(x) + O(|x - c|^3)$.

(٣) إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عدد لانهائي من المرات في الفترة $[c - r, c + r]$ فإن

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

(٤) إذا كانت متسلسلة القوى $\sum a_k x^k$ تقاربية عند x_1 فإنها تتقارب تقارباً مطلقاً عند x_1 .

(٥) إذا كانت متسلسلة القوى $\sum a_k x^k$ تقاربية عند x_1 فإنها تكون تباعدية لكل x يحقق $|x| > |x_1|$.

(٦) إذا كانت متسلسلة القوى $\sum a_k x^k$ تقاربية عند x_1 فإنها تتقارب لكل x يحقق $|x| \leq |x_1|$.

(٧) إذا كانت متسلسلة القوى $\sum a_k x^k$ تقاربية عند x_1 فإنها تتقارب لكل x يحقق $|x| < |x_1|$.

١٣.١ تمارين.

(١) إدرس تقارب متسلسلات القوى الآتية

$$\sum \frac{1}{k^2} x^k \quad (\text{ا})$$

$$\sum \frac{1}{2^k} x^k \quad (\text{ب})$$

$$\sum \frac{1}{k^2} x^{k^2} \quad (\text{ج})$$

$$\sum \frac{1}{k^k} x^k \quad (\text{د})$$

$$\sum \frac{1}{k^k} x^{5k} \quad (\text{هـ})$$

$$\sum \frac{1}{k^k} x^{k^k} \quad (\text{و})$$

$$\sum \frac{\sin k}{k} x^{2k} \quad (\text{ز})$$

$$\sum \frac{1}{\ln \ln k} x^k \quad (\text{ح})$$

(٢) أوجد متسلسلة تايلور لكل من الدوال الآتية

$$c = 0, f(x) = \sin x \quad (\text{ا})$$

$$c = 0, f(x) = 3x^5 + 2x^3 + x^2 - x + 4 \quad (\text{ب})$$

$$c = 0, f(x) = \ln(1 + x) \quad (\text{ج})$$

$$c = 0, f(x) = \frac{1}{1 + x} \quad (\text{د})$$

$$c = 0, f(x) = \frac{1}{1 + 3x} \quad (\text{هـ})$$

$$c = 1, f(x) = \frac{1}{1 + 3(x - 1)} \quad (\text{و})$$

$$c = 0, f(x) = \frac{1}{1 - x^2} \quad (\text{ز})$$